



Alberto Carnicero López

Doctor Ingeniero Industrial del ICAI prom. 1995. Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica e Investigador en el Instituto de Investigación Tecnológica de la ETSI-ICAI. Sus campos de conocimiento están relacionados con la aplicación de métodos numéricos a la resolución de problemas de dinámica de estructuras y mecánica de medios continuos, así como el modelado de materiales inteligentes para su empleo en actuadores o sensores.



Óscar López García

Doctor Ingeniero Industrial. Profesor del Departamento de Fluidos y Calor e Investigador en el Instituto de Investigación Tecnológica de la ETSI-ICAI. Sus campos de conocimiento son la mecánica del medio continuo, sistemas de energía eólica, mecánica de la fractura y fatiga, materiales inteligentes y el método de los elementos finitos.



José Luis Marañón

Ingeniero del ICAI, promoción 1995, y actualmente Investigador en Formación en el ITT.

Comentarios a:
comentarios@icai.es



Modelo simplificado de la interacción dinámica catenaria-pantógrafo

En este artículo se presenta un modelo simplificado para el estudio de la interacción dinámica del sistema catenaria-pantógrafo. Las limitaciones que presenta el modelo por las simplificaciones realizadas son compensadas por los cortos tiempos de ejecución que permiten realizar estudios paramétricos y cualitativos. En el artículo se exponen las bases físicas del modelo así como la influencia de la variación de parámetros de catenaria y pantógrafo en la fuerza de contacto, lo cual resulta esencial para el desarrollo de nuevas catenarias.

El sistema de captación de energía

En el campo de la ingeniería ferroviaria se denomina catenaria al conjunto de elementos que constituyen la línea aérea de transporte y suministro de energía eléctrica a un ferrocarril.

Existen varios tipos de catenarias en función de las características de la línea sobre la que vayan a estar instaladas: alta velocidad, ferrocarril metropolitano, etc. En España, la más común y extendida es similar a la que se muestra en la Figura 1, constanding de tres elementos básicos:

- Hilo de contacto. Es el elemento inferior que se encuentra en contacto con el pantógrafo. Debe tener una geometría tal que permita una captación óptima de la energía.
- Hilo sustentador. Es el elemento superior que desde un punto de vista estructural soporta el peso del hilo de contacto.
- Péndolas. Son los elementos verticales que se encargan de garantizar la geometría

adecuada en el hilo de contacto transmitiendo parte del peso de este al sustentador.

Otros elementos típicos de las catenarias ferroviarias y que aparecen en la Figura 2 son:

- Falso sustentador. Es un elemento que no aparece en todos los tipos de catenarias y que tiene como misión aumentar y uniformizar la rigidez del conjunto mediante la aplicación de una tensión adicional. A la péndola que va unida al falso sustentador se le denomina habitualmente péndola en Y.
- Grifas. Son los elementos que sirven para unir las péndolas al hilo de contacto y falso sustentador.

En la práctica, el tendido de la catenaria está articulado en torno a los denominados cantones. A la distancia entre dos postes consecutivos se la denomina vano, y un cantón no es más que un conjunto de vanos para

los cuales la tensión mecánica del sustentador y del hilo de contacto es la misma, aunque pueden no ser iguales entre sí. Esto se consigue mediante un conjunto de tensores que, montados en los postes inicial y final del cantón, aplican al sustentador y al hilo de contacto la tensión deseada. La longitud habitual de los cantones suele oscilar entre 1 y 1,5 km.

Por otro lado, se designa pantógrafo al sistema de captación de corriente empleado en los vehículos de tracción eléctrica que se alimentan mediante un hilo aéreo de contacto. En general consiste en un colector deslizante constituido por un elemento de contacto (denominado patín o pletinas) dispuesto sobre una estructura articulada, de forma que puedan seguirse las variaciones de altura que presente el hilo de contacto, tal y como se muestra en la Figura 3.

Debido a que la captación de energía se realiza a través del contacto entre la catenaria y el pantógrafo, resulta de especial importancia garantizar no sólo el contacto permanente entre los dos elementos sino también la existencia de una fuerza mínima que garantice el paso de corriente, pero sin que ésta sea excesiva, ya que supondría un desgaste prematuro de los elementos en contacto. El sistema catenaria-pantógrafo se encuentra ampliamente descrito y analizado en [4].

El problema de la interacción catenaria-pantógrafo

Uno de los problemas más interesantes de resolver al estudiar el comportamiento del sistema de captación de energía eléctrica es precisamente el de la interacción dinámica entre la catenaria y el pantógrafo. La forma tradicional de abordar este problema es empleando el método de los elementos finitos y una formulación del problema de contacto basada en un método de penalización.

Ésta es la forma tradicional y más sencilla de modelar el problema del contacto entre dos sólidos y básicamente consiste en relajar la condición de impenetrabilidad de los cuerpos en contacto, de forma que se permita un cierto grado de solapamiento entre ambos. Para que el procedimiento sea matemáticamente correcto se penaliza el solapamiento de las superficies en contacto. Usualmente, esta penalización se introduce en forma de fuerza normal dependiente de la penetración, de forma que



Figura 1. Catenaria ferroviaria.

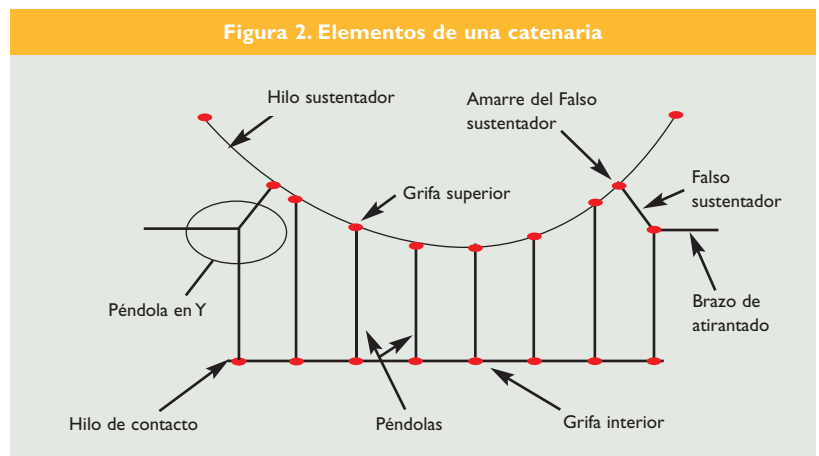


Figura 3. Pantógrafo.

cuanto mayor sea ésta, mayor será la fuerza normal asociada. En la práctica, esto se traduce en intercalar un resorte de rigidez elevada entre los cuerpos que pueden entrar en contacto.

El modelado del problema mediante el método de los elementos finitos implica tiempos de ejecución muy elevados, tanto en la obtención de la configuración inicial de la catenaria como en la propia resolución del

Figura 4. Modelo del sistema catenaria-pantógrafo

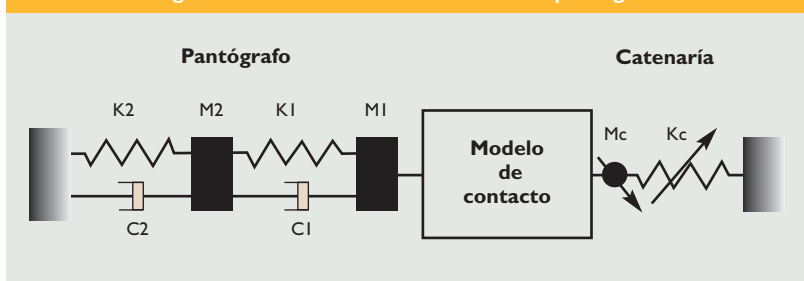


Figura 5. Distribución de rigidez, $K(x)$ para una catenaria prEN 50138

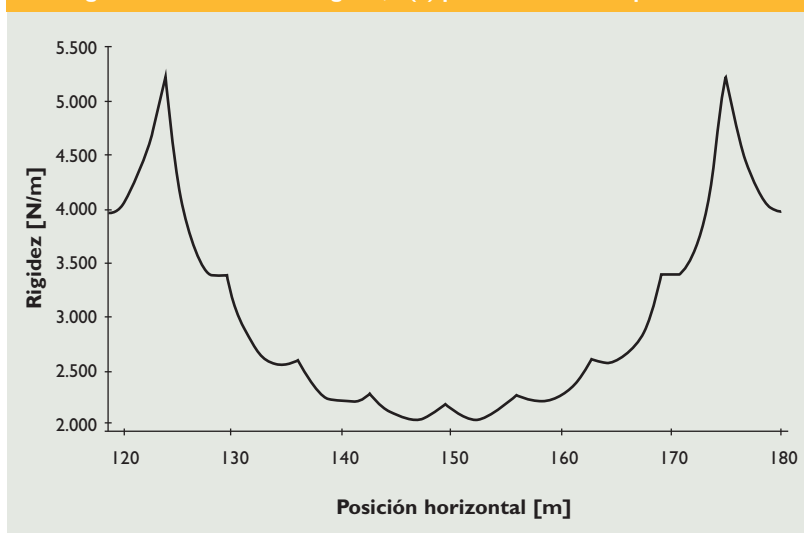
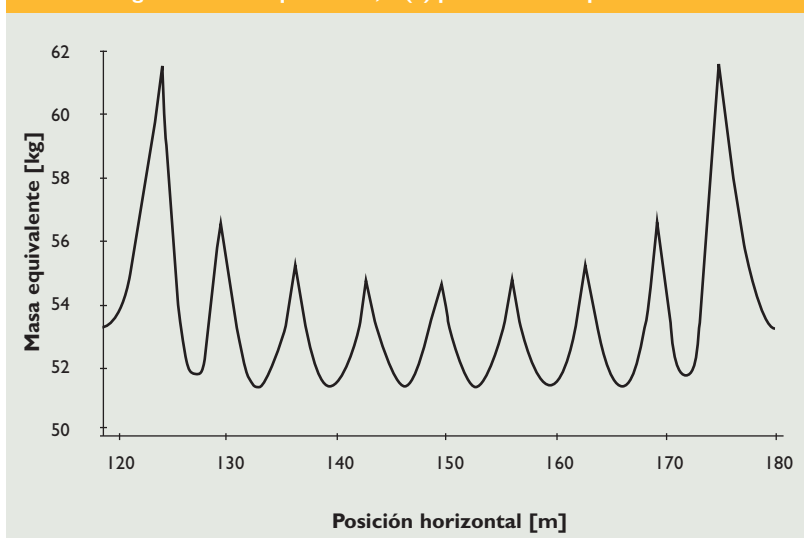


Figura 6. Masa equivalente, $M(x)$ para catenaria prEN 50138



problema dinámico. Esto obliga a buscar modelos alternativos cuando se desea hacer estudios paramétricos del comportamiento dinámico u obtener un conocimiento más cualitativo que cuantitativo del comportamiento del sistema.

Modelo dinámico propuesto

Como se ha comentado anteriormente, la necesidad de reducir los tiempos del cálculo significativamente ha llevado a plantear un modelo simplificado del sistema catenaria-pantógrafo con objeto de estudiar los aspectos más importantes de la dinámica del conjunto y poder realizar un análisis cualitativo de forma rigurosa. Persiguiendo este objetivo el sistema catenaria-pantógrafo se ha modelado mediante el sistema discreto que aparece en la Figura 4 y que básicamente consta de tres partes:

- Un modelo discreto del pantógrafo que, en este caso, se ha definido tal y como lo establece la norma prEN 50318, mediante un sistema de dos grados de libertad.
- Un modelo masa-muelle que representa a la catenaria y que está compuesto por un resorte, K_c , de rigidez variable que modela la rigidez de la catenaria y una masa, M_c , también variable, que introduce el efecto de la masa equivalente de la catenaria.
- Un modelo de contacto entre la catenaria y el pantógrafo.

Modelo de la catenaria

La catenaria se modela mediante una rigidez y una masa variables en el espacio. La distribución de rigidez, $K_c(x)$, y masa equivalente, $M_c(x)$ de la catenaria, tal y como se muestra en las Figuras 5 y 6, varía en función de la posición en el cantón. Dado que el pantógrafo se desplaza a velocidad constante las funciones del espacio pueden transformarse fácilmente en funciones del tiempo.

La rigidez puntual que presenta la catenaria puede calcularse siguiendo la metodología brevemente descrita en [2] y que se encuentra ampliamente desarrollada en [3]. La principal ventaja del método empleado es su rapidez de cálculo frente a los métodos tradicionales de elementos finitos. Algunos autores [5], [6] y [7], por ejemplo, realizan una aproximación senoidal de la distribución de rigidez, sin embargo, en las simulaciones realizadas contrastando ambos métodos se aprecian diferencias importantes en el caso de considerar la rigidez real frente a la aproximada, Figura 7.

Por otro lado, la masa equivalente de la catenaria se calcula estableciendo la igualdad de energía cinética entre el modelo discreto simplificado y la que realmente presenta la catenaria.

Modelo de contacto

Como se ha comentado anteriormente la forma clásica y básica de modelar el contacto es mediante el método del penalti. Los inconvenientes que presenta este método pueden resultar lo suficientemente grandes como para requerir el empleo de otros métodos para el modelado del mismo. Uno de los inconvenientes es tener que elegir la rigidez apropiada para cada problema, ya que valores altos de penalti, que modelarían correctamente la realidad física del problema de contacto, pueden provocar un mal condicionamiento del sistema de ecuaciones y a una pérdida de convergencia. La elección de un valor excesivamente bajo solventaría este problema pero se alejaría de la realidad física, al permitir un elevado grado de interferencia entre las superficies de contacto.

Por estos motivos se ha empleado un modelo lagrangiano de contacto, que prácticamente resuelve todos los problemas del método del penalti y, en este caso, no introduce ningún problema adicional importante. Éste impone la condición de contacto entre los dos cuerpos de forma exacta y se introduce en el sistema de ecuaciones, lo que obliga a la reformulación del mismo. Las diferencias en la respuesta de los dos métodos pueden verse en la Figura 8.

De cara a obtener las ecuaciones que modelan el problema se determina un funcional de energía compuesto por un término de energía cinética, T , otro de energía potencial (en este caso elástica, V), un término disipativo viscoso, D , y por último, un término del trabajo de las fuerzas externas no conservativas, Q_{ext} . Por otro lado, la restricción que deberá cumplirse es la condición de impenetrabilidad, g . Las expresiones de las diferentes energías se muestran en la Tabla I.

La resolución del problema se puede plantear en términos de minimización del funcional de energía, F , condicionado por la restricción de impenetrabilidad.

$$\min F = \min \left(\frac{d}{dt} T + V + D - Q_{ext} \right)$$

$$\text{s.a. } g(x_1, x_c) = x_1 - x_c \leq 0$$

El lagrangiano del sistema se forma añadiendo al funcional todas las restricciones que actúen sobre el problema multiplicadas por un cierto coeficiente llamado multiplicador

Figura 7. Fuerza de contacto según la rigidez empleada

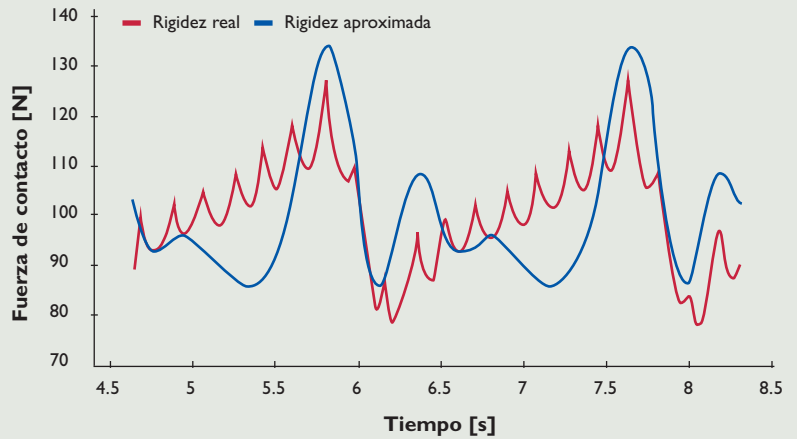


Figura 8. Fuerza de contacto según el método de contacto

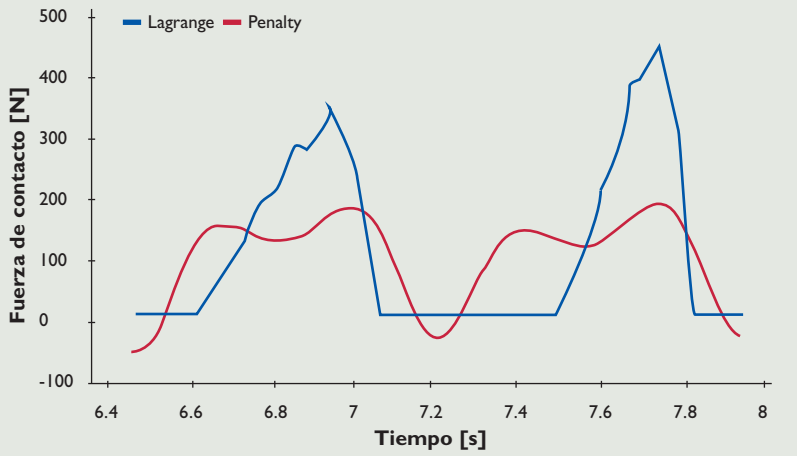


Tabla I

$$T = \frac{1}{2} \cdot [M_2 \cdot \dot{x}_2^2 + M_1 \cdot \dot{x}_1^2 + M_c \cdot \dot{x}_c^2]$$

$$Q_{ext} = F \cdot x_2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot [K_2 \cdot x_2^2 + K_1 \cdot (x_1 - x_2)^2 + K_c \cdot x_c^2]$$

$$g(x_1, x_c) = x_1 - x_c \leq 0$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot [C_2 \cdot \dot{x}_2^2 + C_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2]$$

Figura 9. Sistema catenaria-pantógrafo desacoplado

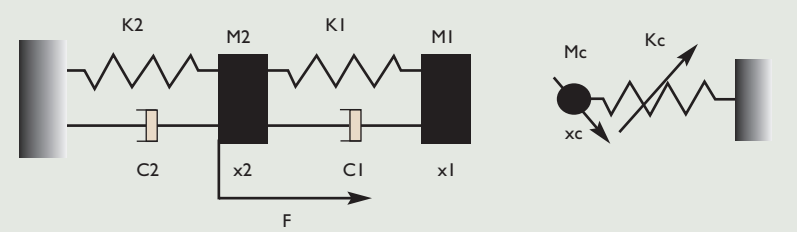


Figura 10. Fuerza de contacto según la velocidad de circulación

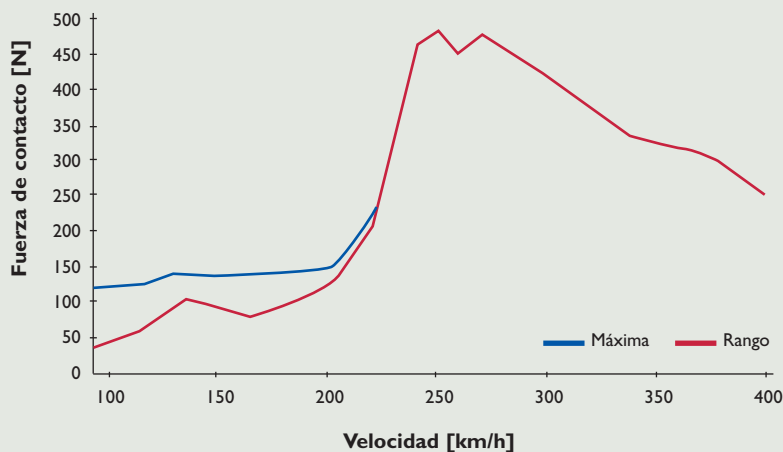


Figura 11. Variación de la fuerza media con la rigidez inferior

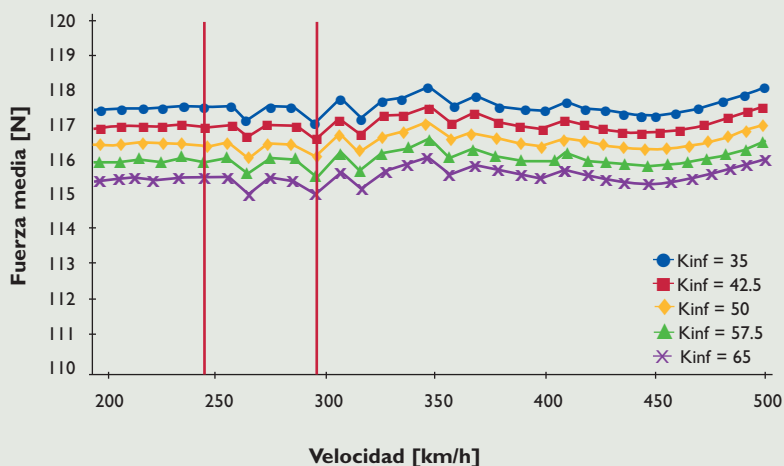
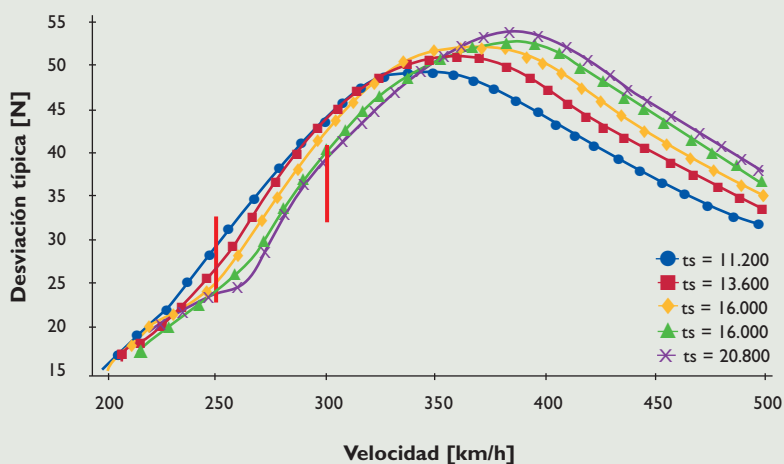


Figura 12. Variación de la desviación típica con la tensión del sustentador



de Lagrange, y que en este caso tiene el significado físico de ser la fuerza de contacto.

$$L(x_1, x_2, x_c, \lambda) = \frac{d}{dt} T + V + D - Q_{ext} + \lambda \cdot g(x_1, x_c)$$

Derivando esta expresión respecto de cada una de las variables y agrupando los términos se llega a un sistema de ecuaciones de la forma,

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & G^t \\ G & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$M = \begin{bmatrix} M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_c(x) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_2 + C_1 & -C_1 & 0 \\ -C_1 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_2 + K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_c(X) \end{bmatrix}$$

$$x = [x_2 \ x_1 \ x_c]^t$$

$$F = [F \ 0 \ 0]^t$$

$$G = [0 \ 1 \ -1]$$

Dado el carácter no lineal de las ecuaciones anteriores por la presencia de los términos de rigidez y masa variables, éstas se resuelven mediante un método de integración paso a paso.

Resultados

El modelo anteriormente planteado es ideal para la realización de estudios cualitativos

Tabla 2

Símbolo	Correlación	Símbolo	Correlación
▲▲	Directa fuerte	▼▼	Inversa fuerte
▲▲	Directa media	▼▼	Inversa media
▲	Directa débil	▼	Inversa débil
◀▶	Sin correlación	▲▼	Sin correlación definida

del comportamiento del sistema ya que por su sencillez permite obtener resultados de forma muy rápida y con un nivel de aproximación bastante razonable. A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos con el modelo presentado.

La Figura 10 muestra el valor de la fuerza de contacto máxima y el rango en función de apreciar, para la catenaria analizada, velocidades superiores a 225 km/h producirían el despegue del pantógrafo. Esto invalidaría el diseño de esa catenaria para su empleo en alta velocidad, por ejemplo.

Por otra parte, el reducido tiempo de cálculo requerido para completar las simulaciones dinámicas hace posible la realización de análisis paramétricos en los que se hagan variar los parámetros que definen tanto la catenaria como el pantógrafo (ver Figura 4), así como la velocidad del tren. Esto es muy útil a la hora de caracterizar la influencia en la dinámica del conjunto de un parámetro en concreto, así como mejorar diseños preexistentes tanto de catenaria como de pantógrafo. Así la Figura 11 muestra la evolución de la fuerza de contacto media en función de la velocidad al variar la rigidez inferior del pantógrafo, o la Figura 12 representa la desviación típica de la fuerza de contacto en función de la velocidad al variar la tensión del hilo sustentador.

En la Tabla 3 se muestran los resultados cualitativos de un análisis de la influencia de diferentes parámetros del sistema catenaria-pantógrafo en la respuesta del mismo. La Tabla 2 resume la simbología empleada en la Tabla 3. La caracterización de la fuerza de contacto se ha realizado tal y como establece la pr-EN50318 (fuerza media, desviación típica, máximo real, máximo estadístico, etc.). En ella se aprecia, por ejemplo, la importancia de la fuerza del pantógrafo o de la tensión del hilo de contacto de la catenaria o de la masa y rigidez superiores del pantógrafo.

Agradecimientos

Los resultados que se presentan en este artículo se enmarcan dentro del proyecto "Optimización del diseño eléctrico y mecánico de catenarias de trenes de alta velocidad" que los autores están realizando en la actualidad con financiación parcial del Ministerio de Fomento. ■

Tabla 3

	Rango veloc.	Fuerza media	Desv. típica	Max. estadístico	Min. estadístico	Máx. real	Min. real
Masa superior	200-300	◀▶	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲	▲▲
	300-400	◀▶	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲	▲▲
	400-500	◀▶	▲	▲	▲	▲▼	▲▼
Rigidez superior	200-300	▲	◀▶	◀▶	◀▶	▼	▲▲
	300-400	▲	▲▲▲	▲▲▲	▼▼▼	▲▲	▼▼▼
	400-500	▲	▲▲▲	▲▲▲	▼▼▼	▲▲	▼▼
Masa inferior	200-300	◀▶	▲▲▲	▲▲▲	▼▼▼	▲▲▲	▼▼▼
	300-400	◀▶	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲
	400-500	▲	▼▼▼	▼▼▼	▲▲▲	▼▼▼	▲▲
Amort. inferior	200-300	◀▶	▼	▼	▲	▲	▲▲
	300-400	▼	▼▼▼	▼▼▼	▲▲▲	▼▼	▲▲▲
	400-500	▲	▼▼	▼▼	▲▲	▼	▲▲▲
Fuerza pantógrafo	200-300	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲
	300-400	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲
	400-500	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲	▲▲▲
Tensión sustentador	200-300	▲	▼	▼	▲	▼	▲▲
	300-400	▲	▲▲	▲▲	▲▲	▲▲	▼▼▼
	400-500	▲	▼▼	▼▼	▲▲	▲▲	▼▼▼
Tensión hilo. contacto	200-300	▲	▼▼▼	▼▼▼	▲▲▲	▼▼	▲▲▲
	300-400	▲	▼▼▼	▼▼▼	▲▲▲	▼▼▼	▲▲
	400-500	▲	▼▼	▼▼	▲▲	▼▼	◀▶
Grifa superior							
Amort. superior							
Grifa inferior							
Masa Péndolas	200 500			◀▶			
Rigidez inferior							
Masa sustentador							
Masa hilo							
Contacto							

Referencias

- [1] CENELEC. *Draft prEN 50318. Validation of Simulation of the Dynamic Interaction Between Pantographs and Overhead Contact Line*. European Committee for Electrotechnical Standardisation. Bruselas. 1999.
- [2] A. Carnicero, O. López-García y V. Torres. *Un modelo para el cálculo de catenarias ferroviarias*. "Anales de Mecánica y Electricidad". Vol LXXXI-I. Mar-Abr. 50-54. 2004.
- [3] O. López-García, A. Carnicero y V. Torres. *Computation of the Initial Equilibrium of Railway Overheads Based on the Catenary Equation*. Aceptado para publicación en "Engineering Structures".
- [4] Poetsch, G.; Evans, J.; Meisinger, R; Kortüm, W.; Baldauf, W.; Veitl, A.; Wallaschek, J. *Pantograph/Catenary Dynamics and Control*. "Vehicle System Dynamics", 28. 159-195. 1997.
- [5] Wu, T.; Brennan, M. J. *Basic Analytical Study of Pantograph-catenary System Dynamics*. "Vehicle System Dynamics", 30. 442-456. 1998.
- [6] Wu, T. X.; Brennan, M. J. *Dynamic stiffness of a railway overhead wire system and its effect on pantograph-catenary system dynamics*. *Journal of Sound and Vibration*, 219(3). 483-502. 1999.
- [7] Park, Tong-Jin; Han, Chang-Soo; Jang, Jin-Hee. *Dynamic sensitivity analysis for the pantograph of a high-speed railway vehicle*. "Journal of Sound and Vibration", 266. 235-260. 2003.